

**Zusammenfassung:** Vorgestellt wird eine neue und frei zugängliche Web-App, die an Hochschulen und Schulen zur Vermittlung statistischer Basiskonzepte einsetzbar ist. Sie eignet sich insbesondere für den Einsatz im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II. Die plattformunabhängige App umfasst voneinander unabhängige granulare Lernobjekte zur beschreibenden und schließenden Statistik sowie zur Exploration ausgewählter Datensätze der europäischen amtlichen Statistik. Im Vordergrund steht die interaktive Visualisierung statistischer Konzepte und gesellschaftsrelevanter statistischer Daten.

## 1 Einleitung

Der Erwerb statistischer Basiskompetenz gilt heute für viele Berufsfelder als Schlüsselqualifikation. Die Vermittlung von Wissen über statistische Methoden und Modelle sowie zur Auswertung und Präsentation von Daten ist daher eine wichtige Aufgabe. Es ist nur konsequent, dass die Vermittlung von Methodenkompetenz nicht erst in der Eingangsphase von Hochschulstudiengängen ansetzt, sondern schon im Mathematikunterricht weiterführender Schulen. Dabei bietet es sich sowohl für den Hochschul- als auch für den Schulbereich an, bei der Vermittlung von statistischem Grundwissen auf die interaktive Visualisierung von Basiskonzepten der Statistik zu setzen und intuitiv bedienbare Visualisierungsumgebungen zur interaktiven Exploration von Datensätzen heranzuziehen.

Benutzerfreundliche Visualisierungsumgebungen für Daten wurden mit der Software *Gapminder* populär. Diese ist unter <http://www.gapminder.org/> frei erreichbar. Sie zielt darauf ab, interessante Datensätze der internationalen amtlichen Statistik auch für Laien über interaktive Animationen verständlich zu machen und Interesse an den hinter den Daten liegenden Fakten zu wecken. Als grafisches Instrument setzt *Gapminder* ausschließlich Blasendiagramme ein. Der Anwender kann hier keine eigenen Datensätze visualisieren. Der unter <http://www.google.com/publicdata/directory> frei zugängliche *Public Data Explorer* von Google verwendet hingegen Zeitreihen anstelle von Blasendiagrammen zur Visualisierung amtlicher Daten und lässt auch die Einspeisung benutzerdefinierter Datensätze zu.

Für den schulischen Mathematikunterricht gibt es schon seit langem interaktive Softwareangebote für

unterschiedliche Themenbereiche. Frei zugänglich über <http://cinderella.de/> ist die interaktive Geometriesoftware *Cinderella*. Die sogar auf Tablets einsetzbare Software *GeoGebra* wurde für die Bereiche Geometrie, Analysis und Algebra entwickelt. Sie ist unter <https://www.geogebra.org/> frei herunterladbar und ermöglicht es u. a., geometrische Figuren darzustellen, zu verändern oder mit Zahlen, Punkten und Vektoren zu rechnen. Sie ist auch für die Vermittlung von Grundlagen der Statistik in der Schule geeignet. Speziell für die letztgenannte Zielsetzung wurde die Software *Fathom* entwickelt, die bis zum Frühjahr 2014 kommerziell für Desktops vermarktet wurde und – momentan befristet – unter <http://concord.org/fathom-dynamic-data-software> frei zugänglich ist.

Die drei zuletzt genannten Softwareentwicklungen repräsentieren innovative und breit einsetzbare Werkzeuge für den Mathematikunterricht. Da sie vielfältige Einsatzmöglichkeiten bieten, müssen sich Anwender aber – anders als etwa bei der ansatzlos verwendbaren und anderen Zielen dienenden Datenvisualisierungsumgebung *Gapminder* – zunächst mit der Software und ihren Kommandos vertraut machen. Mit der Desktop-Software *Fathom* kann man z. B. eigene Datensätze analysieren und visualisieren oder kleinere Simulationen durchführen, kann aber kaum starten ohne zuvor in die Arbeitsweise der Software eingeführt worden zu sein. Ähnliches gilt für die zunehmend bekannter werdende, sehr mächtige Open-Source-Umgebung *R* (s. unter <http://www.r-project.org/>). Diese hat sich in der Statistikausbildung an Hochschulen längst etabliert und stellt inzwischen für Anbieter kommerzieller Statistiksoftwarepakete – etwa *SPSS*, *STATA*, *SAS* oder die neuere Software *JMP* – eine echte Konkurrenz dar.

## 2 Ansatzlos nutzbare Mini-Lernwelten

Interaktive Experimente zum ansatzlosen „Ausprobieren“ von Basiskonzepten der Statistik und intuitiv bedienbare Visualisierungsumgebungen zur interaktiven Exploration von Datensätzen mit unterschiedlichen grafischen Instrumenten stellen eine sinnvolle Ergänzung von Ressourcen dar, die zur Förderung von Methodenkompetenz beitragen. Dies gilt sowohl für Schulen als auch für Hochschulen.

Bibliotheken mit interaktiven oder dynamischen Lernobjekten für *Desktops* (PC/Mac) zur Vermitt-

lung von statistischem Grundwissen gibt es schon lange. Diese Lernobjekte sind i. d. R. Java- oder Flash-basiert und werden an vielen Hochschulen für das Selbststudium oder vorlesungsergänzend eingesetzt, z. B. an der FernUniversität in Hagen (Java-Applets mit statistischen Experimenten unter <http://fernuni-hagen.de/jmittag/bibliothek>) oder an der britischen Universität Durham (Datenvisualisierungen auf der Basis von Flash; s. <https://www.dur.ac.uk/smart.centre/>). Bildungsressourcen zur Statistik wurden auch im Rahmen des US-amerikanischen CAUSE-Projekts (CAUSE = Consortium for the Advancement of Undergraduate Statistics Education) zusammengestellt (s. unter <https://www.causeweb.org/resources/links.php>).

Noch relativ neu sind hingegen Lernobjekte zur Vermittlung von Methodenkompetenz, die auch auf *mobilen Endgeräten* einsetzbar sind. Smartphones oder Tablets sind zwar heute im Schulalltag allgegenwärtig, werden aber noch wenig für den Unterricht genutzt. Für den reflektierten Einsatz von Tablets im Mathematikunterricht gibt es im deutschsprachigen Raum immerhin erste Pilotprojekte (vgl. Bresges, Pallack, Mähler 2014). Diese beziehen sich aber nicht auf Lerninhalte zur Statistik und schließen keine plattformunabhängigen Lösungen ein. Angebote zur interaktiven Visualisierung von Lerninhalten zur Statistik, die für Desktop und mobile Endgeräte gleichermaßen geeignet sind, sucht man im Schulbereich bisher vergeblich.

An zwei deutschen Hochschulen gibt es solche Angebote hingegen schon. Für Studierende der Fern-Universität Hagen wurde auf Basis von HTML5/ Javascript eine Web-App mit *englischsprachigen* Lernobjekten für die statistische Grundausbildung entwickelt. Die App ist kostenfrei unter <http://www.fernuni-hagen.de/jmittag/app> zugänglich. Über QR-Codes wurden die einzelnen Lernobjekte mit einem Statistikkurs der Fern-Universität bzw. mit dessen Lehrbuchausgabe (Mittag 2016) verknüpft. Damit wurde eine direkte Verbindung von Printmaterialien und interaktiven Medien auf Tablets und Smartphones hergestellt.

Eine deutlich weiterentwickelte *deutschsprachige* Fassung der o. g. Web-App wurde Anfang 2015 von der Hamburger Fern-Hochschule (HFH) unter <http://www.hamburger-fh.de/statistik-app> veröffentlicht. Diese Version enthält ganz neue Lernobjekte und auch knapp gehaltene Handhabungsanleitungen für die einzelnen Elemente. Die Lernobjekte sind über QR-Codes mit einem Statistikkurs der HFH verbunden (Zemke 2015).

Für den Schulbereich ist vor allem die deutschsprachige Web-App interessant. Sie kann z. B. von Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe II auf interaktiven digitalen Tafeln (interaktive „Whiteboards“) genutzt werden, etwa für die Veranschaulichung der Sensitivität einer nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate bestimmten Regressionsgeraden gegenüber auffälligen Datenpunkten oder für die grafikgestützte Präsentation von Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Aber auch Schülerinnen und Schüler können die Web-App mit Gewinn nutzen und über eine Visualisierung statistischer Grundkonzepte sowie interessanter Datensätze einen leichteren Zugang zur Statistik finden.

### 3 Aufbau und Design einer plattformunabhängigen Statistik-Web-App

Die App umfasst z. Z. 20 Lernobjekte, weitere sind in Vorbereitung. Die einzelnen Lernobjekte sind drei Teilbibliotheken zugeordnet:

- Methoden der beschreibenden Statistik;
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen, also Modelle zur Charakterisierung von Zufallsvariablen;
- Visualisierung ausgewählter Datensätze der amtlichen europäischen Statistik.

Die nachstehende Abbildung zeigt die Startseite der an der HFH eingesetzten App. Die erwähnte Dreiteilung spiegelt sich hier wider:



Abb. 1: Eingangsportal der Statistik-App

Die meisten Lernobjekte laden die Anwender dazu ein, Basiskonzepte der Statistik per Experiment „auszuprobieren“. Mit einigen Lernobjekten lassen sich z. B. ansatzlos Simulationen durchführen oder Modellgrößen verändern. Die Ergebnisse werden unmittelbar visualisiert. Andere Lernobjekte ermöglichen es, Datensätze mit verschiedenen grafischen Instrumenten zu betrachten (Zeitreihengraphen, Boxplots, Balkendiagramme).

Das Design der Web-App wurde von folgenden Prinzipien bestimmt:

- *Formelfreie Visualisierung:* Formeln wurden generell vermieden. Die Notation in der Statistik ist ohnehin nicht einheitlich und für Lernende anfangs oft gewöhnungsbedürftig. Der theoretische Hintergrund muss von einer Lehrkraft oder einem Printmedium vermittelt werden. Die Kommunikation der Inhalte via App stützt sich allein auf interaktive Visualisierung.
- *Granularität:* Die Lernobjekte sind als in sich geschlossene „Mini-Lernwelten“ konzipiert. Die Granularität erleichtert die Einbettung der Objekte in unterschiedliche Lern- und Lehrszenarien. Die einzelnen Lernobjekte eignen sich damit hervorragend als Ergänzung zu Printmedien oder Unterrichtssequenzen.
- *Selbsterklärende Navigation:* Die Handhabung der Lernobjekte soll möglichst selbsterklärend sein. Die Handhabungsanleitungen weisen daher nur auf Eigenschaften der Objekte hin, die nicht auf den ersten Blick ersichtlich sind.
- *Minimierung von Text:* Der Umfang des auf dem Bildschirm erscheinenden Textes, etwa der in Überschriften oder Achsenbeschriftungen bei Grafiken, wird so knapp wie möglich gehalten. Dies erleichtert die Darstellung auch auf den relativ kleinen Displays von Smartphones.
- *Plattformunabhängigkeit:* Die App soll nicht an ein bestimmtes Betriebssystem gebunden sein und auf allen mobilen Endgeräten und Desktops einsetzbar sein. Deshalb ist die App als frei verfügbare Web-App angelegt und wird bisher nicht zusätzlich über konkurrierende App-Shops angeboten. Nach dem ersten Online-Aufruf ist die App im internen Speicher und kann dann auch offline verwendet werden. Sie ist sowohl per Maus als auch über die Touchscreens mobiler Endgeräte bedienbar.
- *Responsive Web-Design:* Die Größe der Lernobjekte ist auf die Größe des eingesetzten Bildschirms abgestimmt. Eine Grafik wird also automatisch kleiner dargestellt, wenn man etwa von einem PC zu einem Smartphone wechselt.
- *Übersichtlichkeit:* Bei den Lernobjekten zur Datenvisualisierung werden nur Ausschnitte des Gesamtdatensatzes visualisiert. Statt z. B. Zeitreihen für 28 EU-Staaten gleichzeitig zu zeigen, werden immer nur einzelne Länder ausgewählt und miteinander verglichen. Auf diese Weise wird eine das Auge überfordernde Informationsüberfrachtung vermieden.

## 4 Illustrationsbeispiele

Die meisten Lernobjekte laden die Anwender dazu ein, Basiskonzepte der Statistik per Experiment „auszuprobieren“. Einige Elemente der App ermöglichen es, interessante Datensätze aus verschiedenen Perspektiven zu betrachten.

Die Teilbibliothek „Beschreibende Statistik“ enthält z. B. ein Lernobjekt, das sich der Bestimmung einer Regressionsanalyse nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate widmet. Man erzeugt hier zunächst mit dem Finger oder der Maus einige Punkte  $(x; y)$ . Die Regressionsgerade wird dann zusammen mit dem Bestimmtheitsmaß  $R^2$  automatisch ausgewiesen. Anschließend kann man auf den Modus „Punkte verschieben“ umstellen und z. B. Ausreißerpunkte generieren und deren Effekt auf das Anpassungsgütemaß  $R^2$  beobachten.



Abb. 2: Erzeugung einer Regressionsgeraden per Experiment mit Messung der Anpassungsgüte

Ein anderes Lernobjekt derselben Teilbibliothek ist ein Simulationsexperiment, bei dem eine Münze virtuell  $n$ -mal geworfen und die relative Häufigkeit des Auftretens von „Zahl“ für  $j = 1, 2, \dots, n$  visualisiert wird. Abbildung 3 zeigt das Ergebnis einer Serie von  $n$  Münzwürfen, wie es sich bei Verwendung eines Tablets darstellt. Die Anzahl  $n$  von Würfeln ist veränderbar. Durch Aktivierung der Pause-Taste lässt sich die Simulation unterbrechen. Für die Eintrittswahrscheinlichkeit  $p$  für „Zahl“ kann der Wert  $p = 0,5$  eingestellt werden („faire“ Münze) oder auch ein Wert  $p \neq 0,5$  („unfaire Münze“). Zu beobachten ist, dass sich die relative Häufigkeit tendenziell dem Wert  $p$  annähert und zwar umso deutlicher, je größer

$n$  gewählt wird. Das Experiment zeigt, dass die beobachteten relativen Häufigkeiten bei hinreichend groß gewähltem  $n$  zur Schätzung der Wahrscheinlichkeit  $p$  herangezogen werden können.

der Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen  $f(x)$  und  $F(x)$  deutlich. In Statistik- und Schullehrbüchern finden sich Tabellen mit Werten zumindest einer der beiden Funktionen.



Abb. 3: Relative Häufigkeiten für „Zahl“ bei einer Serie von Münzwürfen

Das Simulationsexperiment stellt also auf anschauliche Weise eine Verbindung zwischen beschreibender und schließender Statistik her. Damit wird die Ausgestaltung der Leitidee „Daten und Zufall“ unterstützt, die darauf abzielt Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht an Denkweisen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung heranzuführen (vgl. auch Eichler, Vogel 2013).

Von besonderem Interesse für den schulischen Mathematikunterricht sind aus der Teilbibliothek „Verteilungen von Zufallsvariablen“ etwa ein Lernobjekt, bei dem es um ein Würfelexperiment und dessen Verbindung zur diskreten Gleichverteilung geht (Motivation der Verwendung von Verteilungsmodellen) sowie Objekte zur Binomial- und zur Standardnormalverteilung.

Abbildung 4 zeigt ein Lernobjekt zur Binomialverteilung. Der Nutzer kann hier die beiden Verteilungsparameter  $n$  und  $p$  verändern und die Auswirkung auf Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  und Verteilungsfunktion  $F(x)$  beobachten. Verändert man etwa den Parameter  $p$ , kann man unmittelbar studieren, wie sich für einen festen Wert  $x$  die Überschreitungswahrscheinlichkeit  $1-F(x)$  verändert. Außerdem wird

Das in Abbildung 4 wiedergegebene interaktive Lernobjekt zeigt nicht nur die Zahlenwerte, sondern veranschaulicht auch deren inhaltliche Bedeutung.

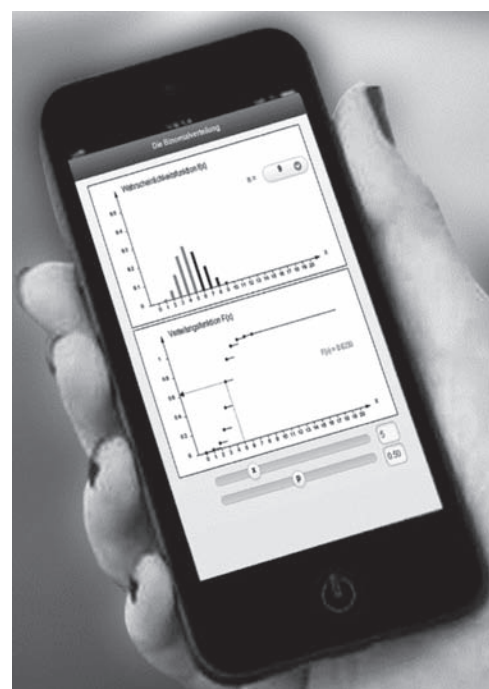


Abb. 4: Variation der Verteilungsparameter  $n$  und  $p$  der Binomialverteilung

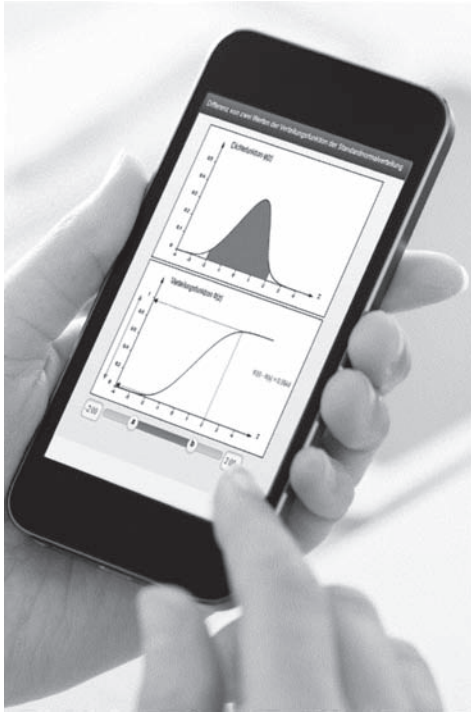


Abb. 5: Interpretation von Flächen unter der Dichtekurve der Standardnormalverteilung

Der rot markierte Wert 0,6230, der den Wert der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung mit den Parametern  $n = 9$  und  $p = 0,5$  an der Stelle  $x = 5$  darstellt, resultiert z. B. durch Addition der Längen der rot markierten Balken. (Die Farbe ist hier nicht, wohl aber bei Aufruf des Lernobjekts sichtbar.) Die roten Balken repräsentieren die Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  für  $x = 0, 1, \dots, 5$ .

Ein Lernobjekt zur Standardnormalverteilung ist in Abbildung 5 wiedergegeben. Zur Charakterisierung der Standardnormalverteilung zieht man bekanntlich ihre Dichte- bzw. ihre Verteilungsfunktion heran. Das Lernobjekt zeigt beide Funktionen simultan und macht sichtbar, wie beide zusammenhängen. Der Nutzer kann zwei Werte  $a$  und  $b$  für die Argumentvariable  $z$  einstellen. Der Inhalt der farbig markierten Fläche unter der Dichtekurve zwischen  $a$  und  $b$  wird numerisch ausgewiesen. (Die Farbe ist wieder nur bei Aufruf des Objekts sichtbar.) Das Lernobjekt veranschaulicht zugleich anhand eines Doppelpfeils, dass sich der von  $a$  bis  $b$  gerechnete Flächeninhalt unter der Dichtekurve auch als Differenz der Werte der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an den Stellen  $a$  und  $b$  interpretieren lässt.

Die in der Teilbibliothek „Visualisierung von Daten“ zusammengefassten Lernobjekte zeigen, dass amtliche Daten auch für Laien relevant sind. Es wurden daher aktuelle Datensätze gewählt, die in den Medien häufiger angesprochen werden oder für junge Menschen von allgemeinem Interesse sind. Die bislang entwickelten Objekte visualisieren Daten des Europäischen Amtes für Statistik (Eurostat) für die 28 EU-Mitgliedstaaten. Die Daten beziehen sich etwa auf die Lebenserwartung Neugeborener, auf die Erwerbstätigkeitsquoten (jeweils mit Differenzierung nach Geschlecht) oder auf die vieldiskutierten Treibhausgasemissionen.



Abb. 6: Interaktive Visualisierung von Eurostat-Daten zur Emission von Treibhausgasen

Abbildung 6 zeigt ein Lernobjekt zum letztgenannten Thema. Sie zeigt für den Zeitraum von 1990 bis 2012 die Veränderung der Emission von Treibhausgasen in den EU-Mitgliedsstaaten für drei benutzerdefinierte Länder. Dem Emissionsniveau im Jahr 1990 ist bei allen Ländern der Wert 100 zugeordnet. Die EU-Kommission hat in ihrer Initiative „Europa 2020“ als ein zu erreichendes Leitziel die Senkung der jeweiligen nationalen Niveaus von 1990 um jeweils 20 % bis zum Jahr 2020 propagiert, also auf den in Abbildung 6 durch einen Pfeil markierten Wert 80. Anhand des Lernobjekts wird deutlich, wie weit die einzelnen Länder auf dem Weg zur Zielerreichung bisher vorangekommen sind.

Statt die Emissionsentwicklung für drei Länder für einen längeren Zeitraum zu betrachten, kann man die Daten alternativ für ein einziges benutzerdefiniertes Jahr grafisch darstellen, dann in Form eines Balkendiagramms für alle 28 Mitgliedstaaten gleichzeitig. Die Daten lassen sich zusätzlich anhand von Boxplots („Kastengrafiken“) visualisieren. Es sind somit unterschiedliche Sichten auf denselben Datensatz oder auf unterschiedliche Ausschnitte eines Datensatzes realisierbar.

Das Lernobjekt in Abbildung 6 veranschaulicht Daten zu einem bestimmten Stichtag. Da Eurostat die Daten regelmäßig aktualisiert, ist auch ein Link zum aktuellen Stand der Datenbasis integriert.

## 5 Fazit und Ausblick

Die vorgestellte Web-App mit granularen und plattformunabhängigen Lernobjekten zeigt neue Möglichkeiten der grafikgestützten und interaktiven Vermittlung von statistischem Basiswissen auf. Die App repräsentiert für den Mathematikunterricht ein leistungsfähiges Werkzeug, das den vorhandenen Medienmix erweitert. Statistische Basiskonzepte können anhand benutzergesteuerter Experimente „ausprobiert“ und Datensätze anhand innovativer Visualisierungsumgebungen ansatzlos auf mobilen Endgeräten und Desktops exploriert werden.

Interaktive Mini-Lernwelten des vorgestellten Typs sind auch für andere Inhalte des Mathematikunterrichts vorstellbar, etwa für andere Verteilungsmodelle oder für interessante Datensätze außerhalb der amtlichen Statistik. Aktuell sind Lernobjekte mit Bezug zur Gesundheitsstatistik in Vorbereitung. Die Einbindung plattformunabhängiger innovativer Lernobjekte in Schullehrwerke via QR-Code kann von App-Entwicklern und Schulbuchverlagen gemeinsam angegangen werden.

## Danksagungen

Dank für konstruktive Anmerkungen zu einer Entwurfsfassung dieses Beitrags gebührt Manfred Borovcnik, Universität Klagenfurt, und Thomas Graf, Hamburger Fern-Hochschule. Bei der Vorbereitung der Abbildungen leistete Alexandra Dirks, ebenfalls HFH, wertvolle Unterstützung. Zu danken ist auch zwei anonymen Gutachtern, die hilfreiche Anregungen zur Erstellung der Endfassung des vorliegenden Artikels lieferten.

## Referenzen

### Literatur:

- Bresges, A.; Pallack, A; Mähler, L. (Hrsg.) (2014): *Unterricht mit Tablet-Computern lebendig gestalten. Themenheft MINT, Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts*. Neuss: Seeberger Verlag.
- Eichler, A.; Vogel, M. (2013): *Leitidee Daten und Zufall, 2. Auflage*. Berlin – Heidelberg: Springer Verlag.
- Mittag, H.-J. (2016): *Statistik – eine Einführung mit interaktiven Elementen, 4. Auflage*. Berlin – Heidelberg: Springer Verlag.
- Zemke, G. (2015): *Wirtschaftsstatistik, 3. Auflage*, Fernstudienkurs der Hamburger Fern-Hochschule.

### Online-Ressourcen

(Zugriff am 24. März 2015):

- <http://cinderella.de/>  
(Lernsoftware *Cinderella*)
- <https://www.geogebra.org/>  
(Lernsoftware *Geobra*)
- <http://concord.org/fathom-dynamic-data-software>  
(Lernsoftware *Fathom*)
- <http://www.r-project.org/>  
(freie *Software R*)
- <http://www.fernuni-hagen.de/jmittag/bibliothek/>  
(virtuelle Bibliothek mit Java-Applets)
- <http://www.fernuni-hagen.de/jmittag/app/>  
<http://www.mittag-statistik.de/app/>  
(englischsprachige Statistik-Web-App)
- <https://www.hamburger-fh.de/statistik-app/>  
(erweiterte deutschsprachige Statistik-Web-App)
- <https://www.dur.ac.uk/smart.centre/>  
(englischsprachige Flash-Animationen für Daten)
- <https://www.causeweb.org/resources/links.php>  
(Ressourcen-Sammlung des CAUSE-Projekts)

### Anschrift des Verfassers

Hans-Joachim Mittag  
Burgstraße 24a  
D 58300 Wetter, Deutschland  
mail@mittag-statistik.de

